ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
Τάξη Α΄

Το τριώνυμο

Ημερομηνία:____________________

Όνομα:_________________________

Ερωτήσεις συμπλήρωσης κενού

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 - 4x - (κ + 10)$.

α) Το τριώνυμο $f(x)$ έχει διπλή ρίζα, όταν $κ =$ ____________

β) Το τριώνυμο $f(x)$ έχει δύο άνισες ρίζες, όταν $κ =$ __________

γ) Η διακρίνουσα του $f(x)$ είναι **144**, όταν $κ =$_____________

δ) Μία ρίζα του $f(x)$ είναι $x_1 = -1$, όταν $κ =$ __________

ε) Αν $κ = 6$, οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης **f** με τον άξονα $x'x$ είναι:
$x_1 =$________ και $x_2 =$________.

Ασκήσεις εμπέδωσης

1. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $λ$ ώστε το τριώνυμο
$φ(x) = x^2 - (2λ - 1)x + λ^2 + 1$,

α) να αναλύεται σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

β) να είναι τέλειο τετράγωνο.

2. Έστω ότι το τριώνυμο $f(x) = x^2 - (κ + 2λ + 1)x - (5κ - 3λ + 2)$ έχει δύο πραγματικές ρίζες με άθροισμα **8** και γινόμενο **15**.
Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς $κ$ και $λ$.

3. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 3$. Να αποδείξετε ότι:
$f(α + 1) + f(α - 1) \geq 8α$, για κάθε $α \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται ότι το τριώνυμο $g(x) = x^2 - 2(λ + 1)x + λ^2 + 5$ έχει ρίζα τον αριθμό **3**.

α) Να αποδείξετε ότι $λ = 2$ ή $λ = 4$.

β) Να αποδείξετε ότι για τη μικρότερη τιμή του πραγματικού αριθμού $λ$ το τριώνυμο $g(x)$ γίνεται τέλειο τετράγωνο, ενώ για τη μεγαλύτερη τιμή του $λ$ το τριώνυμο $g(x)$ αναλύεται σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Γρηγόρης Φωτιάδης, μαθηματικός

Αποδεικτικές ασκήσεις

1. Έστω ότι το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 9(x-1) + \mu - 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 49$.
α) Να αποδείξετε ότι $\mu = 3$.
β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $f(x)$.

2. Δίνεται το τριώνυμο $\varphi(x) = x(x-6) - 10(x-k) + 2k$, το οποίο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες με γινόμενο 60.
α) Να αποδείξετε ότι $\varphi(x) = (x-6)(x-10)$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $\varphi(x^2) = \varphi(0)$.

3. Δίνεται ότι το τριώνυμο $g(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\lambda(2x + \alpha) + g(x) = 0$, έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$ και $S = x_1 + x_2$, να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{S}{2} + k\right) - f\left(\frac{S}{2} - k\right) = 0$.

Σύνθετα θέματα

1. Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $A = 3x^2 + 5x\psi - 2\psi^2$ παραγοντοποιείται και να βρείτε τους παράγοντές της.

2. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + \alpha x - (\beta^2 - \alpha + 1)$.
α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο $f(x)$ έχει ρίζες πραγματικές για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β.
β) Πότε το τριώνυμο $f(x)$ έχει διπλή ρίζα; Στην περίπτωση αυτή ποια μορφή παίρνει το τριώνυμο;
γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αν το τριώνυμο $f(x)$ παίρνει τη μορφή $f(x) = (x+1)(x-2008)$.

3. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ ώστε το τριώνυμο $g(x) = x^2 - 6\kappa x + 5\lambda - 3$, να έχει ρίζες $x_1 = 2\kappa + 1$ και $x_2 = 2\lambda - 1$.

4. Έστω ότι το τριώνυμο $\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}x^2 + \Delta x + 3\alpha$, όπου Δ η διακρίνουσά του, έχει πραγματικές ρίζες, για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$.
α) Να αποδείξετε ότι: $\Delta = 4$.
β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{20x_1}{\alpha} \cdot \frac{20x_2}{\alpha} - 202 \cdot \left(\frac{3\alpha}{x_1} + \frac{3\alpha}{x_2}\right)$.

Γρηγόρης Φωτιάδης, μαθηματικός